

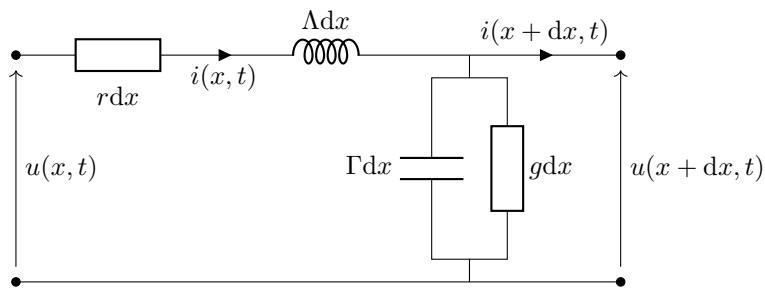
Dispersion et Absorption des Ondes

Aubin SIONVILLE

MPI Clemenceau - 2021-2023

Câble coaxial avec pertes

Circuit



Equation des télégraphistes

Équation vérifié par u dans le circuit ci-dessus :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \Lambda \Gamma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - (g\Lambda + r\Gamma) \frac{\partial u}{\partial t} - gr u = 0$$

Avec $\tau = \frac{\Lambda \Gamma}{\Lambda g + \Gamma r}$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{rg}{\Lambda \Gamma}}$ et $c_0 = \frac{1}{\sqrt{\Lambda \Gamma}}$:

$$\underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}_{\text{D'Alembert}} - \underbrace{\frac{1}{\tau} \frac{\partial u}{\partial t} - \omega_0^2 u}_{\text{Pertes}} = 0$$

Relation de dispersion du câble coaxial avec pertes

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{c_0^2} - j \frac{\omega}{\tau c_0^2}$$

Vecteur d'onde

$$\underline{k}(\omega) = k_r(\omega) + j k_i(\omega)$$

Amortissement

($k_i < 0$ pour propagation selon $+\vec{e}_x$)

$$\delta = \frac{1}{|k_i|}$$

Vitesse de phase

$$v_\varphi \triangleq \frac{\omega}{k_r}$$

Absorption?

Si $k_i \neq 0$ alors il y a absorption
Plus rarement, il peut y avoir
amplification

Dispersion ?

Un milieu est dispersif si v_φ dépend
de la fréquence

Forme complète de l'onde

$$\begin{aligned} \psi(x, t) &= \psi_0 e^{-\frac{x}{\delta}} \cos(\omega t - k_r x + \varphi) \\ &= \psi_0 e^{-\frac{x}{\delta}} \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{v_\varphi} \right) + \varphi \right] \end{aligned}$$

Si $\omega \gg \omega_0$:

$$v_\varphi = \pm c_0 \implies \text{Pas de dispersion}$$

$$k_i = 0 \implies \text{Pas d'absorption}$$

Si $\omega > \omega_0$:

$$v_\varphi = \frac{\omega c_0}{\sqrt{\omega^2 - \omega_0^2}} \implies \text{Pas de dispersion}$$

$$k_i = 0 \implies \text{Pas d'absorption}$$

Si $\omega < \omega_0$:

$$k_r = 0 \implies \text{Pas de dispersion}$$

$$k_i = \pm \frac{\sqrt{\omega_0^2 - \omega^2}}{c_0} \implies \text{Absorption}$$

L'onde peut s'écrire : $\psi(x, t) = \psi_0 \cos(\omega t + \varphi)$: c'est une onde évanescente

Effets de la dispersion

Superpositions de deux OPPH de fréquences voisines

$$\begin{aligned} \text{Résultante : } \psi(x, t) &= 2A \cos \left(\underbrace{\frac{d\omega}{2}t - \frac{dk}{2}x + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}}_{\text{Enveloppe}} \right) \cos \left(\underbrace{\omega_0 t - k_0 x + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}}_{\text{Ondulatoire}} \right) \\ &= 2A \cos \left[\frac{d\omega}{2} \left(t - \frac{dk}{d\omega} x \right) + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} \right] \cos \left[\omega_0 \left(t - \frac{k_0}{\omega_0} x \right) + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} \right] \end{aligned}$$

Vitesse de phase

$$v_\varphi \triangleq \frac{\omega_0}{k(\omega_0)}$$

Vitesse de groupe

$$v_g \triangleq \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_{\omega_0}$$

Paquet d'ondes planes

Paquet d'ondes planes :

Onde plane de durée finie, constituée d'une superposition continue (infinie) d'OPPH

de pulsations voisines dans l'intervalle $\left[\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}, \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2} \right]$ avec $\Delta\omega \ll \omega_0$

On appelle $\Delta\omega$ l'étendue spectrale du paquet d'ondes

$$\text{Écriture du paquet d'onde : } \underline{\psi}(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{a}(\omega) \exp(j(\omega t - \underline{k}x)) d\omega$$

Propagation du paquet d'ondes en milieu
non dispersif

$$\text{En milieu non dispersif, } v_g = \frac{d\omega}{dk} = v_\varphi = \frac{\omega}{k}$$

Propagation du paquet d'ondes en milieu
dispersif

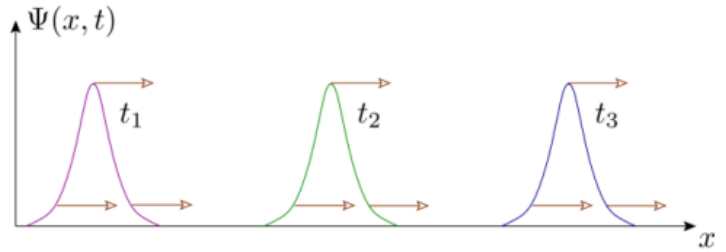
$$\text{En milieu dispersif, } v_g \neq v_\varphi$$

Le paquet d'ondes s'étale

Résumé

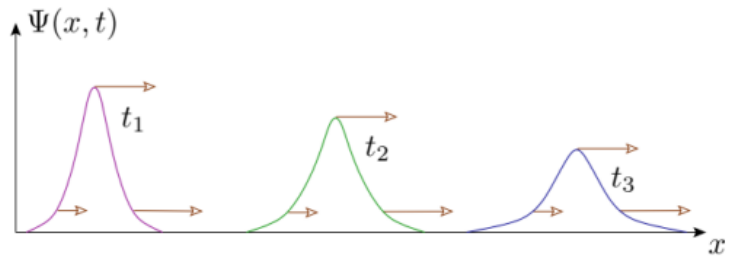
- Pas de dispersion
- Pas d'absorption
- Linéarité

*L'onde est progressive à la vitesse c_0 ;
propagation sans aucune déformation*



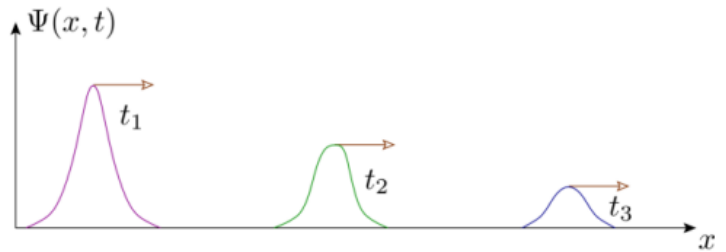
- Dispersion
- Pas d'absorption
- Linéarité

*Étalement du paquet d'ondes ; sans pertes
d'énergie*



- Pas de dispersion
- Absorption
- Linéarité

*Atténuation du paquet d'ondes ; avec pertes
d'énergie et segmentation possible du paquet
en plusieurs paquets*



- Dispersion
- Absorption
- Linéarité

*Étalement du paquet d'ondes ; avec pertes
d'énergie et segmentation possible du paquet
en plusieurs paquets*

